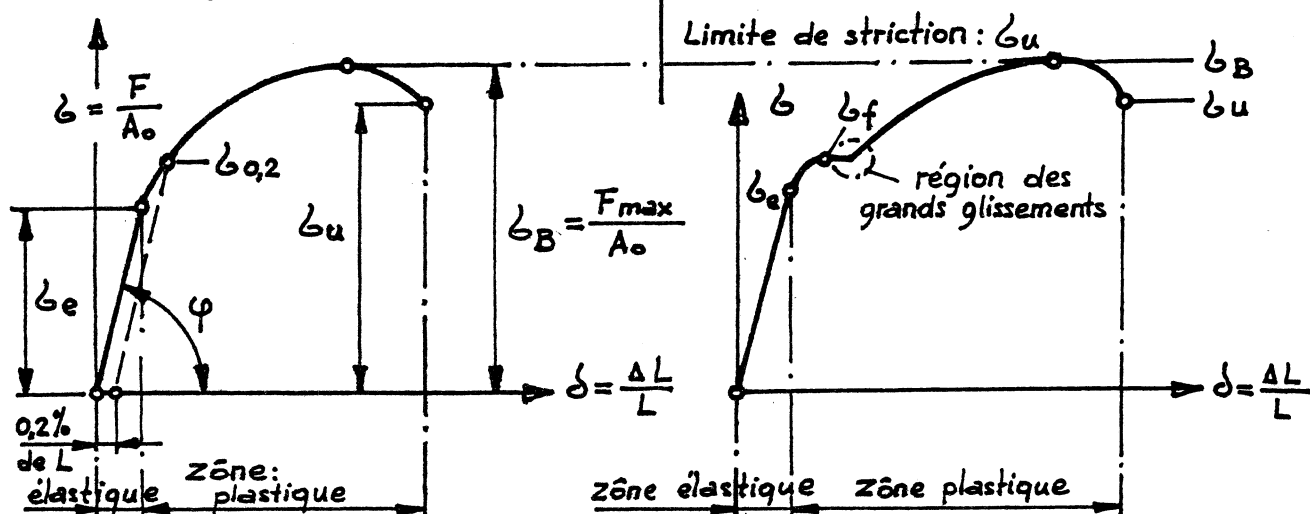


Formulaire de RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

Diagramme de traction des métaux

Cas général : Aciers traités
Aciers écrouis
Alu. + alliages Aciers trempés
Cu et alliages - Ti + alliages

Cas particulier : Acier doux,
et normalisé



Symboles et unités selon VSM 10921

A_0 : Section initiale de la partie calibrée [mm^2] (par simplification prendre A)

A_u : Section à l'endroit de la rupture [mm^2]

F : Charge extérieure [daN]

E : Module de rigidité (élasticité) longitudinale [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

G : Module de rigidité transversale [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

$\delta\%$: Allongement spécifique exprimé en %

σ : Tension longitudinale [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

σ_B : Tension maximum ou résistance à la traction [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

σ_e : Tension limite élastique [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

σ_f : Tension limite d'écoulement

σ_u : Tension à l'instant de la rupture [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

$\sigma_{0.2}$: Tension limite située à 0,2 % de L

ΔL : Valeur absolue de l'allongement [mm]

L : Longueur initiale de la pièce [mm]

τ : Tension transversale ou de glissement [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

T : Charge de l'effort transversal [daN]

M_f : Moment de flexion [daNmm]

M_t : Moment de torsion [daNmm]

δ : delta

σ : sigma

τ : tau

autres symboles utilisés

Module de rigidité (élasticité) longitudinale E $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$

$$E = \frac{\mathcal{E}}{\delta} = \frac{\mathcal{E} \cdot L}{\Delta L} = \text{pseudo tg } \varphi = \text{constante selon le matériau}$$

Valeur absolue de l'allongement ΔL [mm]

$$\Delta L = \mathcal{E} \cdot L \quad \text{partant de } E = \frac{\mathcal{E} \cdot L}{\Delta L} \quad \text{l'allongement } \Delta L = \frac{\mathcal{E} \cdot L}{E}$$

$$\text{et } \mathcal{E} = \frac{F}{A} \quad \text{donc } \Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} \quad \text{expression selon la loi de Hooke}$$

$$\text{Allongement spécifique } \delta\% = \frac{\Delta L}{L} \cdot 100 [\%]$$

Coefficient de contraction latérale δ_c

Le coefficient de contraction est déterminé avec un rapport "m" entre l'allongement et la contraction, selon Poisson.

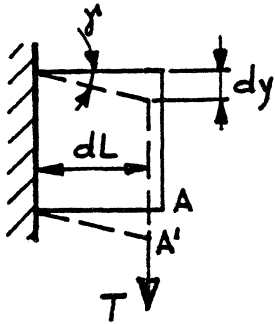
$$\text{On utilise son inverse } \frac{1}{m} = \mu, \quad \text{d'où } \delta_c = \frac{\delta}{m} = \mu \cdot \delta$$

Coefficient de Poisson pour métaux ferreux : $m = \frac{4}{1} \text{ à } \frac{10}{3}$

Coefficients de contraction μ : acier = 0,3 ; béton = 0,1 ; liège = 0

Tableau de quelques valeurs de E et G à 20°C

Module de rigidité (élastique) longitudinale E $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$	Module de rigidité transversale G $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$
Acier : 21000	Acier : 8100
Fonte : 7500 à 10000	Fonte : 3200 à 4500
Fonte malléable : 17000	Fonte malléable : 6800
Aluminium : 7200	Aluminium : 2800
Cuivre : 12000	Cuivre : —
Plomb : environ 1800	Bronze pour ressorts : 4500
Bronze : 9000 à 11000	Bronze phosphoreux : 4100
Béton : environ 2000	Maillechort : 4600
Bois : environ 1300	Nickeline : 4800
Maillechort : 12500	
Nickeline : 13000	
Acier à ressorts ; mêmes valeurs que "l'acier".	



Selon l'hypothèse de Navier, les surfaces restent planes et parallèles sous l'effort tranchant T , (Hypothèse admise).

τ : tension de cisaillement ou de glissement

$$\gamma = \frac{dy}{dL} \quad \tau \cdot dL = dy \cdot G \Rightarrow G = \frac{\tau}{\gamma}$$

Relation entre les deux modules de rigidité E , G et le coefficient de Poisson. Déterminé par Bach :

$$G = \frac{m E}{2(m+1)} = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

μ : Acier 0,3
Béton 0,1

Résistance des matériaux à la fatigue $\sigma_{\text{admissible}}$

La tension admissible varie selon le cas de charge, classé en fonction du genre de sollicitation. Selon Bach :

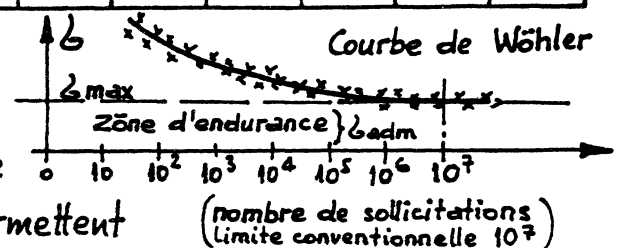
Cas I Statique 		$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_e}{2 \text{ à } 3}$	Charge constante
Cas II Oscillante 		$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_e}{3 \text{ à } 4}$	Charge pulsante ou oscillante ; bielles, engrenages...
Cas III Alternée 		$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_e}{5 \text{ à } 6}$	Charge alternée ; Pistons ou bielles - moteur, arbre tournants, ...

Ces valeurs - assez grossières - permettent une application courante. Il est nécessaire d'avoir recours à des essais pour plus de précision.

Perte en % à la fatigue selon l'état de surface ; rugosité

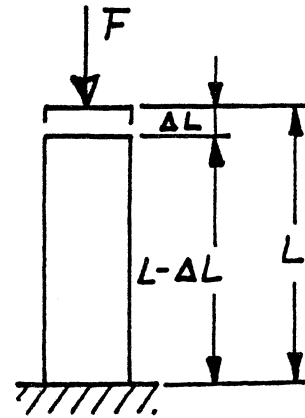
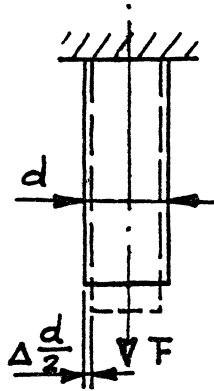
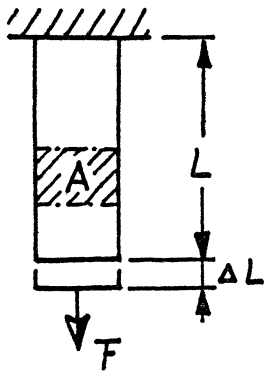
Etat...	▽ Grossier			▽▽ Moyen			▽▽▽ Fin			Très fin		
N/∇	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Perte %	30	28	25	22	19	16	13	11	8	6	3	-

La durée de vie à la fatigue est déterminée à partir de sollicitations répétées pour chaque cas de charge. Les résultats permettent de tracer la courbe de la tension de rupture, dite de Wöhler.



Traction - Compression

4



A : section de la pièce [mm^2]

F : effort de traction ou de compression [daN]

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

σ : tension = $\frac{\text{charge}}{\text{section}}$ [$\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$]

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$F = A \cdot \sigma$$

ΔL : allongement ou raccourcissement $\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E} = \frac{\sigma \cdot L}{E}$ [mm]

Δd : contraction latérale [mm] $\Delta d = \mu \cdot \frac{F \cdot d}{A \cdot E}$ ($\mu = 0,3$ ac.)

Traction et compression engendrées par des causes indirectes

$\Delta \theta$, [$^{\circ}\text{C}$]: variation de température

α , [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]: coefficient de dilatation linéaire, quelques valeurs:

$23,7 \cdot 10^{-6}$ aluminium

$13,1 \cdot 10^{-6}$ nickel

$18,5 \cdot 10^{-6}$ Laiton

$12 \cdot 10^{-6}$ acier

$16,2 \cdot 10^{-6}$ cuivre

$1 \cdot 10^{-6}$ invar

$\Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E} = L \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$ [mm] allongement; chaleur +
raccourcissement; chaleur -

$$\sigma = \alpha \cdot \Delta \theta \cdot E \left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2} \right]$$

Tension dans les cylindres

Cylindres minces:

$$\sigma_t = \frac{p \cdot d_i}{2e} \quad \text{épaisseur; } e = \frac{p \cdot d_i}{2\sigma}$$

p : pression [$\text{bar} = \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$]

σ_t : σ transversale σ_L : σ longitudinale

$$\sigma_L = \frac{p \cdot d_i}{4e}$$

Cylindres à fortes parois:

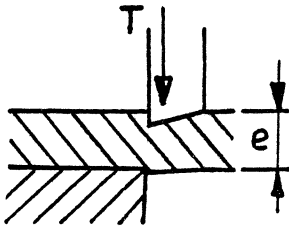
formule de Lamé; $e = \frac{D}{2} \left[\sqrt{\frac{\sigma + p_i}{\sigma - p_i}} - 1 \right]$ pression int. > p.ext.

formule de Gashof; $e = \frac{D}{2} \left[\sqrt{\frac{4\sigma + 3p_i}{4\sigma - 5p_i}} - 1 \right]$ $\sigma_{\max} = p_i \left[\frac{1,3D^2 + 0,4d^2}{D^2 - d^2} \right]$

formule de Lamé; $e = \frac{D}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{\sigma - 2p_e}{\sigma}} \right]$ $\sigma_{\max} = p_e \left[\frac{2 \cdot D^2}{D^2 - d^2} \right]$ $p_i < p_e$

Cisaillement

5



τ : tension de cisaillement $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$

généralement $\tau_{\text{adm}} = \frac{4}{5} \tau_{\text{adm}}$ $K = 1,5 \text{ } \square \square \square ; 1,3 \text{ } \bigcirc ; 2 \text{ } \bigodot$.

T : effort tranchant ou de cisaillement [daN]

A : section sollicitée au cisaillement [mm²]

Résistance au cisaillement $\tau_{\text{admissible}}$

$$\tau_{\text{adm}} = \frac{T \cdot K}{A}$$

$$A = \frac{T \cdot K}{\tau_{\text{adm}}}$$

$$T = \frac{\tau_{\text{adm}} \cdot A}{K}$$

Cas	τ_{ad}
I	$\frac{\tau}{1,5}$
II	$\frac{\tau}{2}$
III	$\frac{\tau}{3}$

Rupture au cisaillement $\tau_r = \tau_B$ de rupture

à la cisaille:

poinçonnage (étampe):

$$T = 1,7 \tau_r \cdot L \cdot e$$

$$T = 1,7 \tau_r \cdot L_p \cdot e$$

L : longueur de coupe

L_p : longueur périphérique de coupe

Flambage

Charge critique selon la formule d'Euler:

$$F_{\text{critique}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{L_0^2} \text{ [daN]}$$

L_0 : longueur L de la pièce avec coefficient, selon le mode de fixation.

Introduire un coefficient de sécurité

S, pour éviter le risque de flambage: Fonte, 8; Fer, acier, 5; Bois, 7
ou 2,5 à 4, charges constantes ou peu variables, grandes mach.
5 à 8, charges variables, grandes machines

10 voir plus, charges fortement variables, chocs, petites machines

La formule d'Euler est valable si l'élancement $\lambda = \frac{L_0}{\rho} \geq 100$

ρ : rayon de giration de surface

$$\rho = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \text{ [mm]}$$

$$A = \frac{\pi a b}{4}$$

Moments quadratiques: $\times \bigcirc \times J_x = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$; $\times \square \times h J_x = \frac{b h^3}{12}$; $\times \bigodot \times J_x = \frac{\pi a^3 b}{64}$;

$$\tau_{\text{critique}} = \frac{F}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_x}{A \cdot L_0^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\tau_{\text{critique}} < \tau_{\text{élastique}} \left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$$

Formules construites pour éviter le flambage: (barre pleine)

$d = 1,7 \sqrt[4]{\frac{F \cdot S \cdot L^2}{E}}$ Bout Libre $L_0 = 2L$	$d = 1,2 \sqrt[4]{\frac{F \cdot S \cdot L^2}{E}}$ $L_0 = L$	$d = 1,02 \sqrt[4]{\frac{F \cdot S \cdot L^2}{E}}$ $L_0 = \frac{L}{2}$	$d = 0,85 \sqrt[4]{\frac{F \cdot S \cdot L^2}{E}}$ $L_0 = \frac{L}{2}$	 ϕd L : longueur de la pièce x ~~~ x : section dangereuse
$L < 12d$	$L < 24d$	$L < 33d$	$L < 48d$	pour acier, sans sécurité

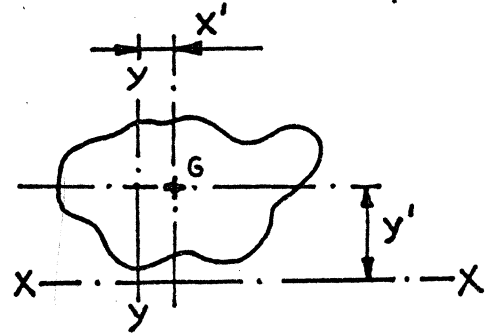
Centre de gravité G

Le centre de gravité G, d'une surface est déterminé par le moment statique M_s d'une surface et un axe connu, situé dans son plan.

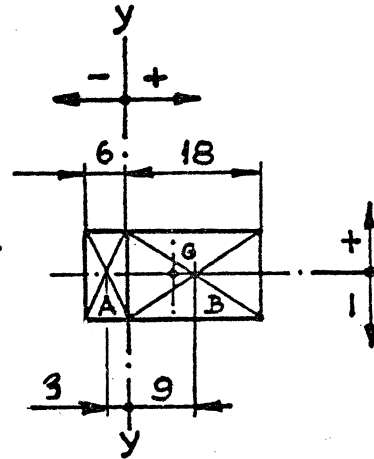
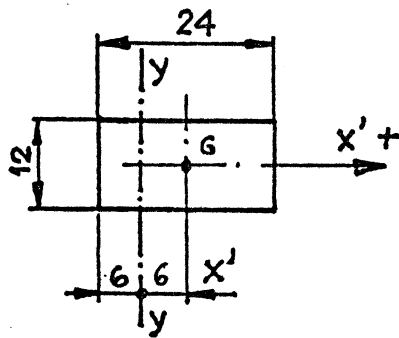
$$M_s = \sum (dA \cdot y) \text{ [mm}^3\text{]}$$

dA : élément de surface

y : axe connu situé dans le plan ou $x \div x$.



Exemples:



y' située sur $X \div X$ connu

$$\text{Surface A} = 6 \cdot 12$$

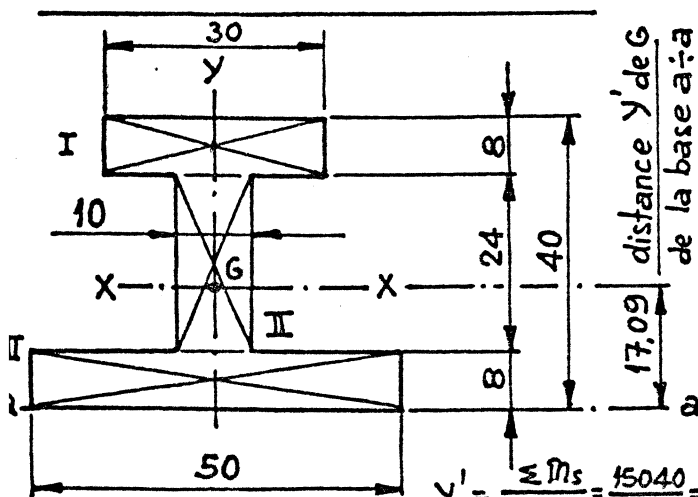
$$\text{Surface B} = 18 \cdot 12$$

Position des centres de gravité : Surface A, de $y \div y = -3$
Surface B, de $y \div y = +9$

$$M_s (y \div y) = 18 \cdot 12 \cdot 9 - 6 \cdot 12 \cdot 3 = 1728 \text{ [mm}^3\text{]}$$

$$A' = 24 \cdot 12 = 288 \text{ [mm}^2\text{]} \text{ rectangle A+B}$$

$$\text{distance } y \div y \text{ à } X' = \frac{M_s (y \div y)}{A'} = \frac{1728}{288} = 6 \text{ [mm]} \text{ donne la position de G.}$$



$$y' = \frac{\sum M_s}{\sum A} = \frac{15040}{880} = 17.09$$

Marche à suivre :

- découper la figure en plusieurs surfaces, dont les centres G sont connus
- calculer la Σ de ces surfaces
- déterminer le M_s de chaque surface
- puis la somme des M_s de la figure.

Surfaces de la figure $b \cdot h$ [mm ²]		Distance y ($a \div a$ à G de chaque figure) [mm]	Moment statique $b \cdot h \cdot y$ [mm ³]
N°			
I	$30 \cdot 8 = 240$	36	8640
II	$10 \cdot 24 = 240$	20	4800
III	$50 \cdot 8 = 400$	4	1600
Somme ; 880 [mm ²]		—	$\Sigma ; 15040$ [mm ³]

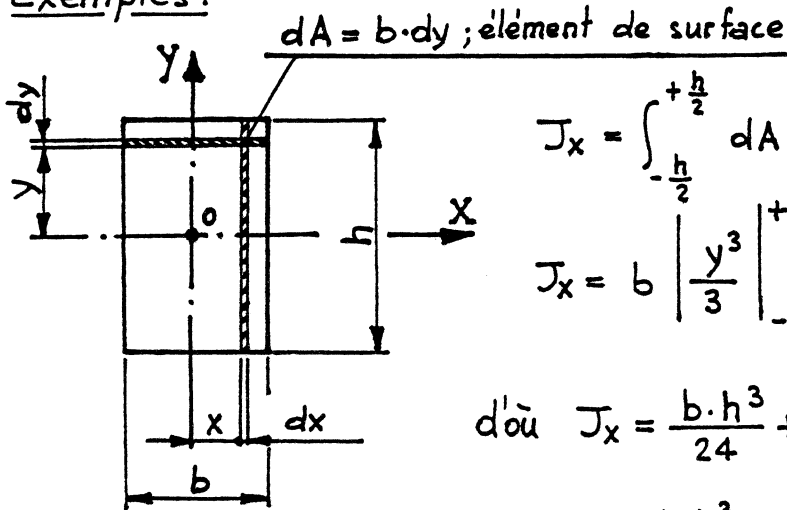
Moments quadratiques J (moments d'inertie)

7

- axial, x ou y : $J_x = \int_0^A dA \cdot y^2$, $J_y = \int_0^A dA \cdot x^2$

- polaire, : $J_o = J_x + J_y$, $J_o = \int_0^A dA \cdot \rho^2$ [mm⁴]

Exemples :

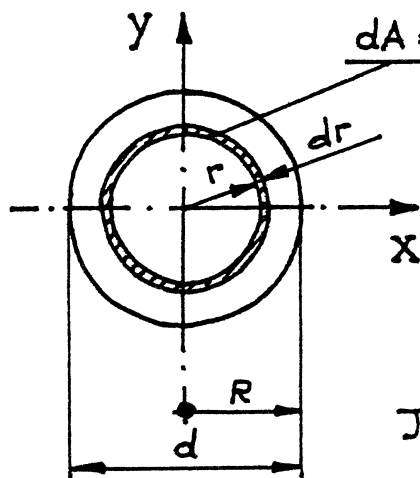


$$J_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dA \cdot y^2 = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy \cdot y^2$$

$$J_x = b \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^3}{3 \cdot 2^3} - \left(-\frac{b \cdot h^3}{3 \cdot 2^3} \right)$$

d'où $J_x = \frac{b \cdot h^3}{24} + \frac{b \cdot h^3}{24} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ et $J_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$

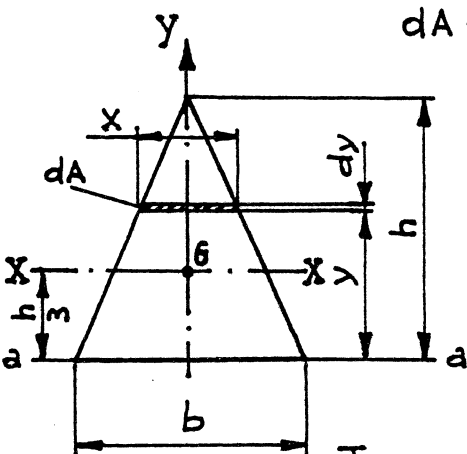
$$J_o = J_x + J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} + \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{b \cdot h}{12} (b^2 + h^2) \text{ [mm}^4\text{]}$$



$$J_o = \int_0^R dA \cdot r^2 = 2\pi \int_0^R dr \cdot r^3 = 2\pi \left| \frac{r^4}{4} \right|_0^R$$

$$J_o = \frac{2\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \text{ [mm}^4\text{]}$$

$J_o = J_x + J_y$, $J_x = J_y$ d'où $J_{x(y)} = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$
[mm⁴]



$a \div a$ = base du triangle

$x \div x$ = axe passant par le centre G

$J_{a \div a}$, avec $x = \frac{b}{h}(h-y)$ de la similitude du triangle ou $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$. Pour $x \div x$, $y = \frac{h}{3}$

$$J_{a \div a} = \int_0^h y^2 dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y) \cdot y^2 = \int_0^h \frac{bh - by}{h} \cdot y^2$$

$$J_{a \div a} = \int_0^h by^2 - \frac{by^3}{h} = b \int_0^h y^2 - \frac{b}{h} \int_0^h y^3 = b \left| \frac{y^3}{3} \right|_0^h - \frac{b}{h} \left| \frac{y^4}{4} \right|_0^h$$

$$J_{a \div a} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^4}{h \cdot 4} = \frac{bh^3}{12} (4-3) = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow J_{x \div x} = J_{a \div a} - y^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36} \text{ [mm}^4\text{]}$$

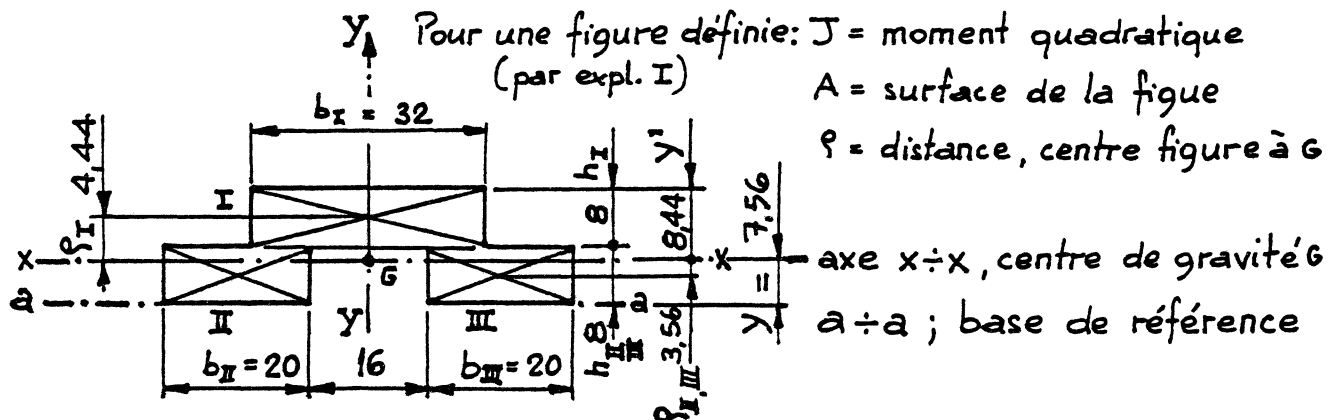
Exemple de calcul d'un moment quadratique

8

1^{er} procédé: avec $J_x = \sum [J] + \sum [A \cdot \rho^2]$

$$J = \frac{bh^3}{12}$$

$$A = b \cdot h$$



$$J_{I_x} = J_I + A \cdot \rho_I^2 = \frac{b_I h_I^3}{12} + b_I \cdot h_I \cdot \rho_I^2 = \frac{32 \cdot 8^3}{12} + 32 \cdot 8 \cdot 4,44^2 = 6412,01$$

$$J_{II_x} = J_{II} + A \cdot \rho_{II}^2 = \frac{b_{II} h_{II}^3}{12} + b_{II} \cdot h_{II} \cdot \rho_{II}^2 = \frac{20 \cdot 8^3}{12} + 20 \cdot 8 \cdot 3,56^2 = 2881,11$$

$$J_{III_x} = J_{II_x}$$

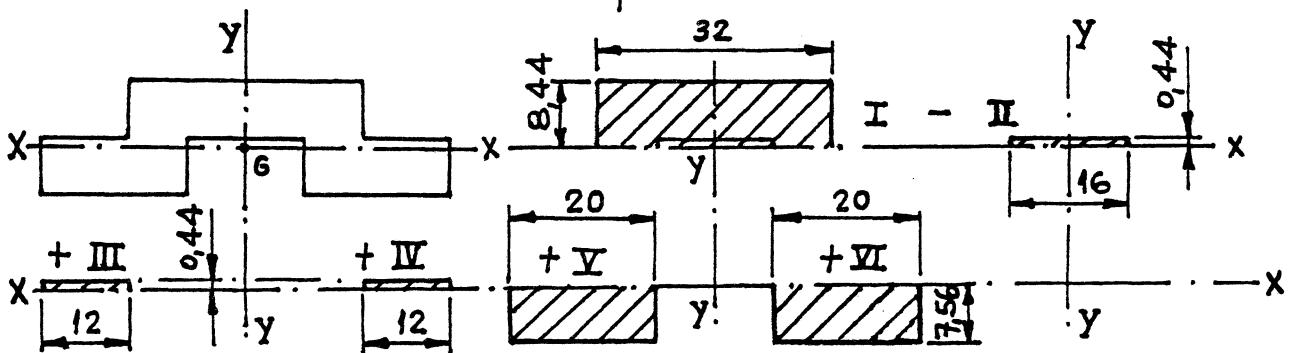
Moment quadratique, total,

de la pièce = $\sum J_x [\text{mm}^4]$

$$J_{III_x} = 2881,11$$

$$\sum J_x = 12174,23$$

2^{ème} procédé: en appliquant $\frac{bh^3}{3}$ aux surfaces judicieusement choisies et délimitées par l'axe $x \div x$.



$$J_x = \sum [J] \text{ par rapport à la base de l'axe } x \div x, \quad J = \frac{bh^3}{3}$$

$$J_I = \frac{32 \cdot 8,44^3}{3} = 6412,92$$

$$J_{II} = \frac{16 \cdot 0,44^3}{3} = \dots 0,45$$

$$J_{III} = \frac{12 \cdot 0,44^3}{3} = \dots 0,34$$

$$J_{IV} = \frac{12 \cdot 0,44^3}{3} = \dots 0,34$$

$$J_V = \frac{20 \cdot 7,56^3}{3} = 2880,54$$

$$J_{VI} = \frac{20 \cdot 7,56^3}{3} = 2880,54$$

$$J_x = J_I - J_{II} + J_{III} + J_{IV} + J_V + J_{VI}$$

$$\sum J_I, J_{III}, J_{IV}, J_V, J_{VI} = 12174,68$$

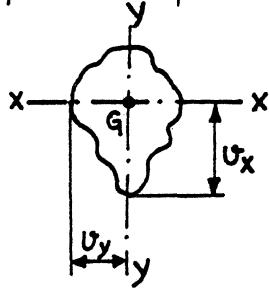
$$J_{II} = 0,45$$

$$J_x = 12174,68 - 0,45 = \underline{\underline{12174,23}} [\text{mm}^4]$$

Module de résistance à la flexion W_x [mm³]

9

Le module de résistance à la flexion d'une surface est le rapport du moment quadratique axial J_x ou J_y à la distance u qui sépare l'axe x ou y , passant par le centre de gravité, de la fibre la plus éloignée située sur le pourtour de la dite surface.



$$W_x = \frac{J_x}{u_x}$$

$$W_y = \frac{J_y}{u_y}$$

Exemples:

rectangle; $W_x = \frac{J_x}{u_x} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$

cercle; $W_x = \frac{\frac{\pi \cdot d^4}{64}}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 d^3$

Module de résistance à la torsion W_o

Dans les problèmes à la torsion il est l'équivalent du module de résistance à la flexion. Le module de résistance à la torsion est le rapport du moment quadratique polaire J_o à la distance u séparant le pôle de la fibre la plus éloignée.

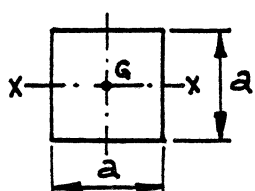
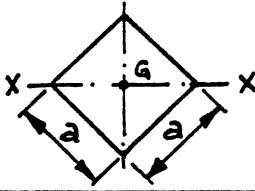
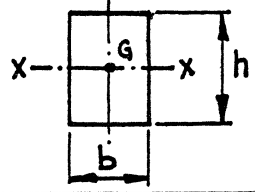
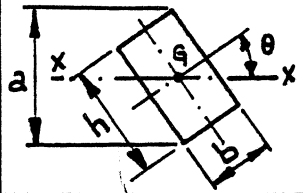
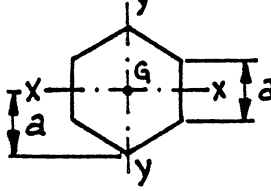
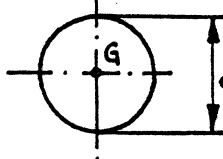
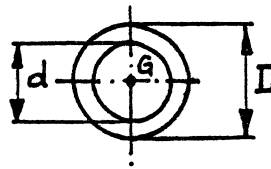
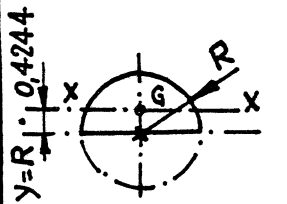
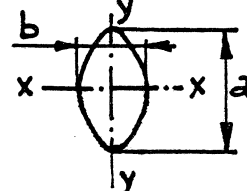
Exemple; module de résistance à la torsion du cercle :

$$J_o = J_x + J_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} + \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$u = \frac{d}{2} \text{ rayon du cercle}$$

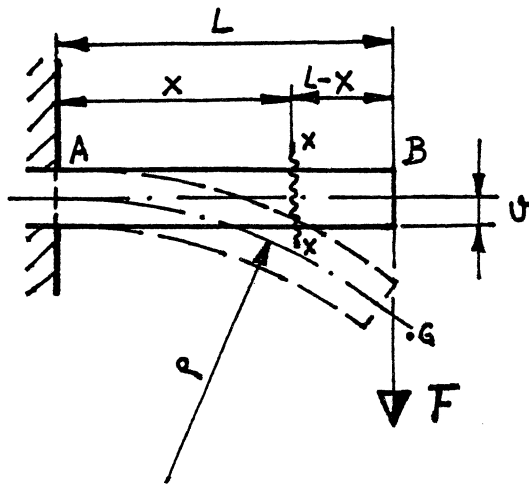
$$W_o = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot \frac{2}{d} = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \text{ pour simplifier, on prend parfois } W_o \approx 0,2 d^3$$

Section ou profil de la pièce	Moment quadr. J_x	Module résist. W_x	Moment quadr. J_o	Module résist. W_o
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{bh}{144} (3b^2 + 4h^2)$	$\frac{bh(3b^2 + 4h^2)}{96\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$
	$\frac{b^3h}{48}$	$\frac{b^2h}{24}$	$\frac{bh(3b^2 + 4h^2)}{144}$	$\frac{b(3b^2 + 4h^2)}{96}$
	$\frac{bh^3}{4}$	$\frac{bh^2}{4}$		
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{12}$		

Section	J_x	W_x	J_o	W_o
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^3}{6}$	$\frac{a^4}{6}$	$0,235 a^3$
	$\frac{a^4}{12}$	$0,118 a^3$	$\frac{a^4}{6}$	$0,235 a^3$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh}{12} (b^2+h^2)$	$\frac{bh}{6} \sqrt{b^2+h^2}$
	$\frac{bh(h^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)}{12}$	$\frac{bh(h^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)}{6 \cos \theta + b \sin \theta}$	$\frac{bh(b^2+h^2)}{12}$	$\frac{bh}{6} \sqrt{b^2+h^2}$
	$5a^4 \frac{\sqrt{3}}{16}$ $J_x = J_y$	$W_x = 5a^3 \frac{\sqrt{3}}{16}$ $W_y = \frac{5}{8} a^3$	$5a^4 \frac{\sqrt{3}}{8}$	$5a^3 \frac{\sqrt{3}}{8}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
	$\frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$	$\frac{\pi}{32} (D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{16} \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right)$
	$0,1098 R^4$	$0,1908 R^3$	$0,51 R^4$	$0,4695 R^3$
	$J_x = \frac{\pi a^3 b}{64}$ $J_y = \frac{\pi a b^3}{64}$	$W_x = \frac{\pi}{32} a^2 b$ $W_y = \frac{\pi}{32} a b^2$	$\frac{\pi ab}{64} (a^2 + b^2)$	$\frac{\pi}{32} (a^2 + b^2)$

Section	J_x	W_x	J_o	W_o
	$\frac{Bd_1^3 - bh^3 + ed_2^3}{3}$	$\frac{J_x}{d_2}$	$J_x + J_y$	
1			2	
	$\frac{Bd_1^3 - bh^3 + ed_2^3}{3}$	$\frac{J_x}{d_2}$	$J_x + J_y$	
1			2	
	$\frac{Bd_1^3 - bh^3 + ed_2^3}{3}$	$\frac{J_x}{d_2}$	$J_x + J_y$	
1			2	
	$\frac{aB^3 + he^3}{12}$	$\frac{aB^3 + he^3}{6B}$	$\frac{aB^3 + he^3 + B(a+h)^3}{12}$ $\frac{-(B-e)h^3}{12}$	$\frac{2 J_o}{\sqrt{B^2 + (a+h)^2}}$
3		4		
	$\frac{aB^3 + he^3}{12}$	$\frac{aB^3 + he^3}{6B}$	$\frac{aB^3 + he^3 + B(a+h)^3}{12}$ $\frac{-(a+h)^3 - (B-e)h^3}{12}$	$\frac{2 J_o}{\sqrt{B^2 + (a+h)^2}}$
3		4		
	$\frac{aB^3 + he^3}{12}$	$\frac{aB^3 + he^3}{6B}$	$\frac{aB^3 + he^3 + B(a+h)^3}{12}$ $\frac{-(B-e)h^3}{12}$	$\frac{2 J_o}{\sqrt{B^2 + (a+h)^2}}$
3		4		
	$J_x = \frac{ea^3}{12}$ $J_y = \frac{ea^3}{3}$	$W_x = ea^2 \frac{\sqrt{2}}{6}$ $W_y = ea^2 \frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{5ea^3}{12}$	$\frac{ea^2 \sqrt{10}}{6}$
	$\frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$\frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$\frac{BH^3 - bh^3 + B(H-h)^3}{12}$ $\frac{... + h(B-b)^3}{12}$	$\frac{2 J_o}{\sqrt{H^2 + B^2}}$
5				
1 $d_1 = \frac{eH^2 + ba^2}{2(eH + ba)}$ $d_2 = H - d_1$	2 pour a et e très petits $J_o \approx J_x + \frac{aB^3}{12}$	3 pour a et e très petits $J_x = \frac{aB^3}{12}$	4 pour a et e très petits $W_x = \frac{aB^2}{6}$	5 variable pour

FLEXION



M_f en A; $-F \cdot L$ en X; $-F \cdot (L-x)$
[daNmm] en B; 0

E: module de rigidité (élasticité)
Longitudinale $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$

ρ : rayon de courbure

$$\frac{1}{\rho} = y'' = -\frac{M}{J \cdot E} \text{ équation de la déformée}$$

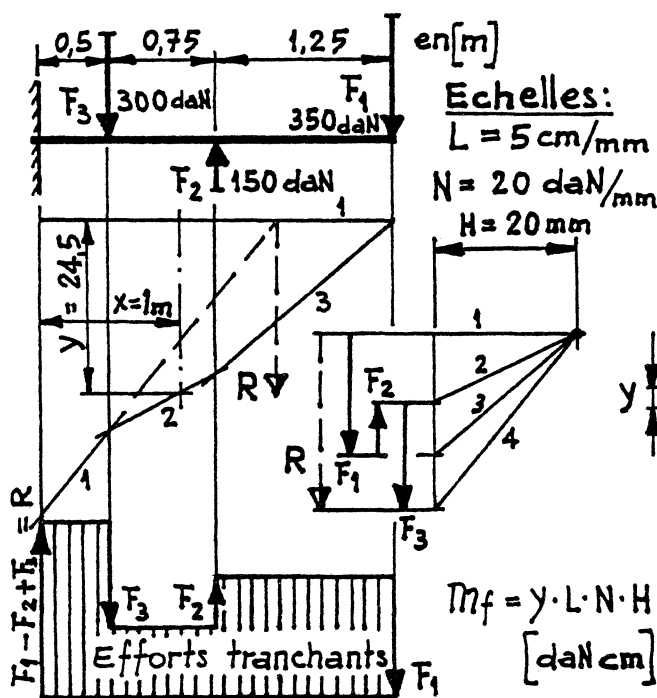
J_x : moment quadratique $[\text{mm}^4]$

σ_{adm} : tension admissible de flexion
 $\left[\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}\right]$

W_x : module de résistance
à la flexion $[\text{mm}^3]$

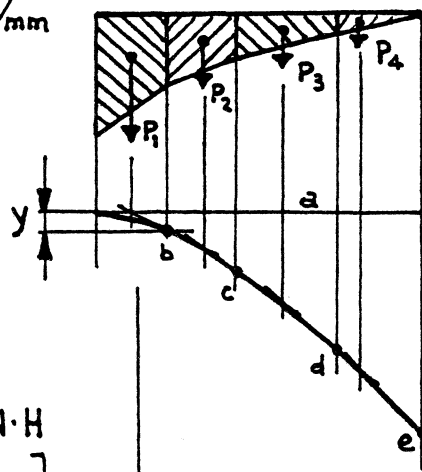
$$W_x = \frac{J_x}{U} \quad \sigma = \frac{M}{W_x} \leq \sigma_{adm}$$

On trouve la flèche de la déformée
en partant des surfaces de la
courbe des moments sur J_x .



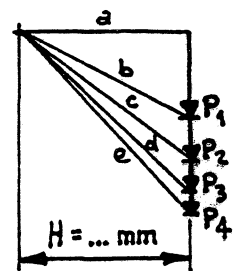
Moment de flexion à $x = 1 \text{ m}$:

$$M_f = 24,5 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 20 = 490\,000 [\text{daNcm}]$$



$$\sigma = \frac{M}{J_x} [\text{cm}^4]$$

$$\frac{\text{daN}}{\text{cm}^3} / \text{mm dessin}$$



$$f = \frac{L \cdot N_s \cdot H}{E} \cdot y [\text{mm}] = \dots [\text{cm}]$$

Ech: $L = \dots \text{ cm/mm}$, dessin

$N_s = \dots \text{ daNcm}^{-2} / \text{mm}$, dessin
avec E en daNcm^{-2}

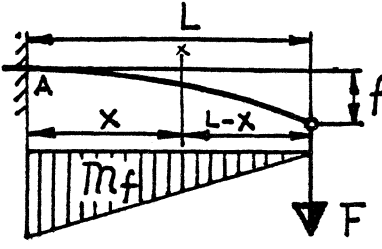
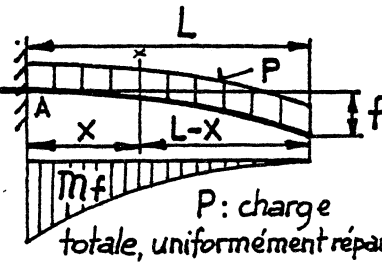
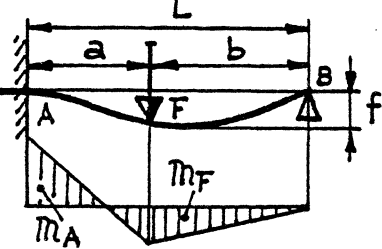
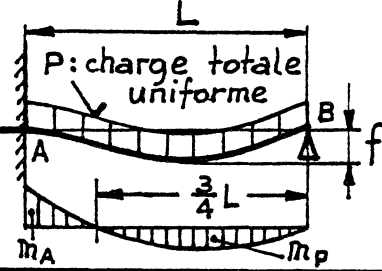
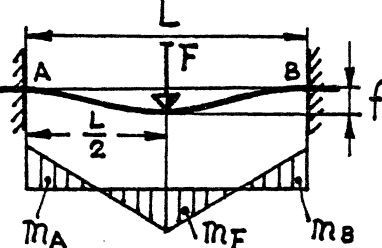
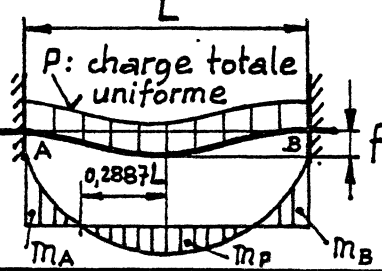
F: Charge qui tend à plier
la poutre. [daN] 12

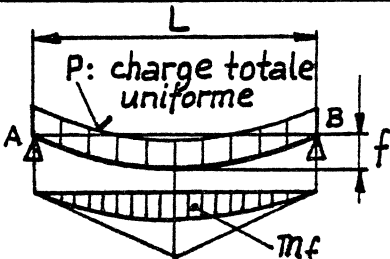
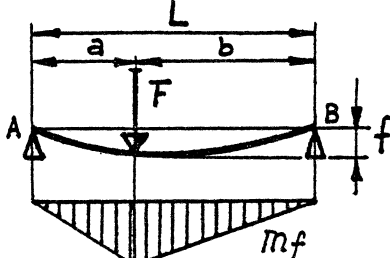
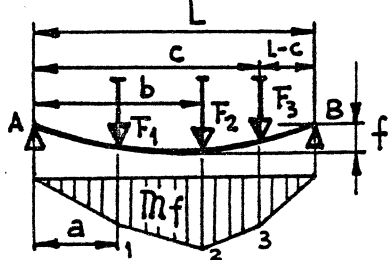
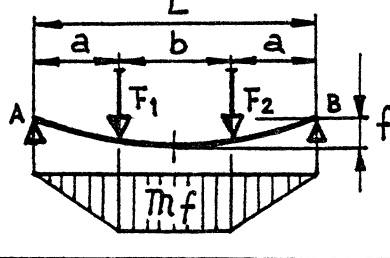
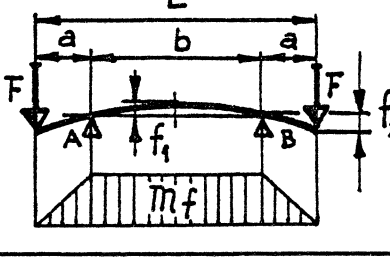
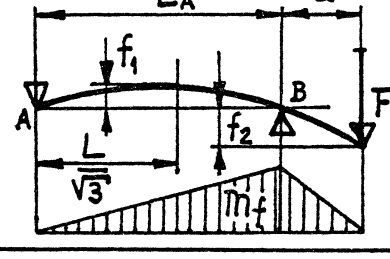
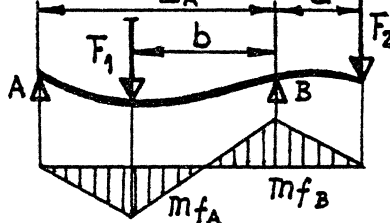
G: fibre neutre située dans l'axe
du centre de gravité

L: distance; charge-encastrement

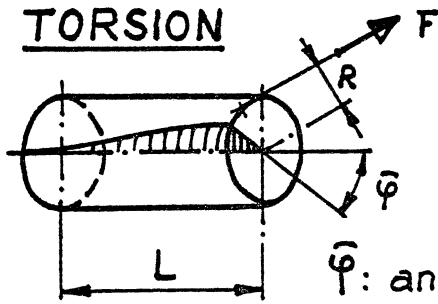
M_f : moment de flexion représentant
la somme algébrique de tous les
moments statiques des efforts
agissant sur la section considérée

U: distance séparant l'axe, passant
par le centre de gravité, de la
fibre la plus éloignée.

Mode d'application des charges	M_f [daNmm] Moment de flexion	f [mm] flèche max	Réactions d'appuis
	$M_f = -F \cdot L$ $M_{f_x} = -F \cdot (L-x)$	$f = \frac{F \cdot L^3}{3 E J_x}$	$R_A = F$
 P: charge totale, uniformément répartie	$M_f = -\frac{P \cdot L}{2}$ $M_{f_x} = -\frac{P \cdot (L-x)^2}{2 L}$	$f = \frac{P \cdot L^3}{8 E J_x}$	$R_A = P$
	$M_A = -\frac{F a b}{2 L^2} (2L-a)$ $M_F = \frac{F a^2 b}{2 L^3} (2L+b)$	$f = \frac{F \cdot a^3 b^2}{12 E J_x L^3} [3a+4b]$	$R_A = \frac{F \cdot b}{2 L^3} (3L^2 - b^2)$ $R_B = \frac{F \cdot a^2}{2 L^3} (2L+b)$
 P: charge totale uniforme	$M_A = -\frac{P \cdot L}{8}$ $M_p = \frac{9 P \cdot L}{128}$	$f = \frac{P \cdot L^3}{185 E J_x}$	$R_A = \frac{5}{8} P$ $R_B = \frac{3}{8} P$
	$-M_A = +M_F = -M_B$ $M_F = -\frac{F \cdot L}{8}$	$f = \frac{F \cdot L^3}{192 E J_x}$	$R_A = R_B = \frac{F}{2}$
 P: charge totale uniforme	$M_A = M_B = -\frac{P \cdot L}{12}$ $M_p = \frac{P \cdot L}{24}$	$f = \frac{P \cdot L^3}{384 E J_x}$	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$
F: charge [daN] L: longueur totale de la poutre [mm] E: module de rigidité [daNmm⁻²] J_x: moment qu^d axial [mm⁴]			

 P: charge totale uniforme	$m_f = \frac{P \cdot L}{8}$	$f = \frac{5 P \cdot L^3}{384 E J_x}$	$R_A = R_B = \frac{P}{2}$
	$m_f = \frac{F a b}{L}$	$f = \frac{F \cdot a^2 b^2}{3 E J_x \cdot L}$	$R_A = \frac{F \cdot b}{L}$ $R_B = \frac{F \cdot a}{L}$
	$m_{f1} = R_A \cdot a$ $m_{f2} = R_A \cdot b - F_1(b-a)$ $m_{f3} = R_A \cdot c - F_1(c-a) - F_2(c-b)$	Figure ci-dessus : Charge centrée $m_f = \frac{F \cdot L}{4}$ $f = \frac{F \cdot L^3}{48 E J_x}$ $R_A = R_B = \frac{F}{2}$	$R_A = \frac{F_1(L-a) + F_2(L-b) + F_3(L-c)}{L}$ $R_B = \frac{F_1 \cdot a + F_2 \cdot b + F_3 \cdot c}{L}$ $R_A + R_B = F_1 + F_2 + F_3$
	$m_f = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot a$	$f = \frac{F_1 + F_2}{48 E J_x} \cdot a (3L^2 - 4a^2)$	$R_A = R_B = \frac{F_1 + F_2}{2}$
	$m_f = -F \cdot a$	$f_1 = \frac{F \cdot a \cdot b^2}{8 E J_x}$ $f_2 = \frac{F \cdot a^2}{3 E J_x} \left(a + \frac{3 \cdot b}{2} \right)$	$R_A = R_B = F$
	$m_f = -F \cdot a$	$f_1 = \frac{F \cdot L_A^2 \cdot a}{E J_x \cdot 9 \sqrt{3}}$ $f_2 = \frac{F \cdot a^2}{3 E J_x} (L_A + a)$	$R_A = -\frac{F \cdot a}{L_A}$ $R_B = \frac{F (a + L_A)}{L_A}$
	$m_{fA} = \frac{F_1 \cdot b - F_2 \cdot a}{L_A} (L_A - b)$ $m_{fB} = -F_2 \cdot a$	$f = \text{solution graphique}$	$R_A = \frac{F_1 \cdot b - F_2 \cdot a}{L_A}$ $R_B = \frac{F_1 (L_A - b) + F_2 (L_A + a)}{L_A}$

TORSION



M_t : moment de torsion [daNmm] 15

$$M_t = F \cdot R = \tau \cdot W_o$$

$$M_t = \frac{\text{watt}}{s^{-1}} = \frac{P}{\omega} = \left[\frac{Nm}{s} \right] \quad P: \text{puissance}$$

$$\omega = \frac{2\pi \cdot n}{60} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

τ : tension de torsion $\left[\frac{daN}{mm^2} \right]$

n : tours/min

ϕ : angle de torsion ; glissement total sous L .

L : longueur de la barre soumise à la torsion. [mm]

G : module de rigidité transversale $\left[\frac{daN}{mm^2} \right]$

J_o : moment quadratique polaire $[mm^4] = J_x + J_y$

U : distance séparant le pôle, centre de gravité, de la fibre extérieure [mm]

W_o : module de résistance à la déformation ; à la torsion $[mm^3]$

$$W_o = \frac{J_o}{U}, \quad \text{pour le cercle } W_o = \frac{J_o}{R} \approx 0,2d^3$$

$$\tau = \frac{M_t}{W_o}, \text{ tension de torsion}$$

$$\varphi_{rad} = \frac{\tau \cdot L}{G \cdot R} = \frac{M_t \cdot L}{J_o \cdot G}$$

$$\varphi^\circ = \varphi_{rad} \frac{360^\circ}{2\pi}$$

$$\varphi_{max}^\circ = \left(\frac{1}{4} \right)^\circ \text{ par mètre}$$

$$\varphi_{rad} = 0,0043 \text{ max.}$$

Pour sections rectangulaires introduire les facteurs C_1, C_2

$$\tau = \frac{M_t \cdot C_1}{b^2 \cdot h} \leq \text{tension admissible}$$

$$\varphi^\circ = \frac{360^\circ}{2\pi} \cdot C_2 \cdot \frac{M_t \cdot L}{G \cdot b^3 \cdot h}$$

$\frac{h}{b}$	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	10	∞
C_1	4,8	4,52	4,33	4,18	4,06	3,88	3,74	3,55	3,43	3,2	3
C_2	7,11	5,82	5,11	4,67	4,37	4,01	3,8	3,56			

Arbres de transmission

$$M_t [Nm] = 9550 \frac{P_{kw}}{n} \quad 1 Nm = 100 daNmm$$

$$d = 1,7 \sqrt[3]{\frac{M_t [daNmm]}{\tau [hb]}} [mm] \text{ tous matériaux ; résistance à la torsion}$$

$$\dots \text{ pour acier avec } \tau: 2hb \quad d = 130 \sqrt[3]{\frac{P_{kw}}{n}} [mm]$$

arbre résistant à la déformation de moins de $0,25^\circ$ /mètre :

valable jusqu'au $\phi 130$,

$$\text{dès } 130 \phi \text{ prendre } d = 1,7 \sqrt[3]{\frac{M_t}{\tau}} \quad d = 13 \sqrt[4]{\frac{M_t}{[Nm]}} = 130 \sqrt[4]{\frac{P_{kw}}{n}} [mm]$$

Arbres soumis à la flexion et torsion combinées

σ : tension de flexion, τ : tension de torsion σ_{eq} : tension équiv.

$$\text{tension équivalente } \sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{admissible}$$

$$\text{moment équiv. } M_{eq} = \sqrt{M_f^2 + \frac{3}{4} M_t^2} = W_x \cdot \sigma_{admissible}$$

$$\text{d'où la tension équivalente } \sigma_{eq} = \frac{32 \cdot M_i}{\pi \cdot d^3} \leq \sigma_{admissible}$$

et le diamètre de l'arbre est :

$$d = 2,17 \sqrt[3]{\frac{M_{eq}}{\sigma_{fl}}} [mm]$$

avec, M_i [daNmm], σ_{fl} $\left[\frac{daN}{mm^2} \right]$

Arbres creux : formules valables si $\frac{D}{d} \gg 2$

Remarque :

S'il existe encore une tension supplémentaire de traction ou de compression, on l'additionnera algébriquement avec la tension normale de flexion.

Matériau	Charge de rupture σ_u $\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$	Limite élast. σ_e $\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$	Module élastique E $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$		Charge admissible $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$		Charge admissible en $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$											
			Module élastique E $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$	Module E $\frac{\text{daN}}{\text{cm}^2}$	traction σ			Flexion σ			Cisaillement τ			Torsion τ			Compression σ	
					I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II
Ac 34.11	34-42	19-26	↑	↑	1100-1300	960-1200	750-950	1100-1300	960-1200	750-950	1000	750	600	650	450	460	1200	1100
Ac 37.11	37-45	24			1200-1400	1000-1300	800-1000	1200-1400	1000-1300	800-1000	1040	800	640	700	500	400	1300	1150
Ac 42.11	42-50	23			1250-1450	1100-1400	900-1100	1350-1450	1100-1400	900-1100	1200	900	700	730	600	500	1350	1250
Ac 50.11	50-60	27			1550-1800	1200-1600	950-1200	1550-1800	1200-1600	950-1200	1440	1120	800	1000	800	600	1650	1400
Ac 60.11	60-70	30			1800-2100	1350-1850	1050-1400	1800-2100	1350-1850	1050-1400	1600	1300	900	1300	1000	700	1950	1600
Ac 70.11	70-85	35			2100-2450	1500-2200	1100-1700	2100-2450	1500-2200	1100-1700	2060	1600	1040	1800	1400	800	2250	1850
AcC 10.61	38	21			1200	1000	800	1200	1000	800	1040	800	640	700	500	400	1200	1000
AcC 16.61	42	23			1250	1100	900	1250	1100	900	1200	900	700	730	600	500	1250	1100
AcC 25.61	32-50 47-55	24 28																
AcC 35.61	50-60 55-65	28 33																
AcC 45.61	60-70 65-75	34 39			1700-2000 1850-2150	1300-1750 1500-2000	1000-1350 1100-1500	1700-2000 1850-2150	1300-1750 1500-2000	1100-1350 1100-1500	1500 1700	1200 1450	850 980	1200 1500	950 1200	700 770	1850 2000	1625 1750
AcC 60.61	70-85 75-90	40 45	850'000	2'200'000	2100-2350 2250-2600	1600-2100 1650-2300	1200-1600 1250-1750	2100-2350 2250-2600	1600-2100 1650-2300	1200-1600 1250-1750	2060 2200	1650 1750	1100 1200	1850 2050	1450 1600	850 1050	2200 2400	1850 1950
1N1 15 (EN 15)	max. 55 60-80	65	2'000'000	↑														
1N125 Cr8 (ECN 25)	max. 70 80-100	70	2'000'000	↑														
1N135 Cr8 (ECN35)	max. 75 90-120	75	2'000'000	↑														
1N145 Cr11 (ECN45)	max. 83 120-140	75	2'000'000	↑														
3N115 Cr8 (VCN15)	max. 70 65-75	70	2'000'000	↑	1900 2100-2400	1570 1700-2300	1220 1300-1750	1900 2100-2400	1570 1700-2300	1120 1300-1750	1600 2000	1300 1600	900 1050	1300 1800	1000 1400	700 800	1900 2250	1570 2050
2N135 Cr8 (VCN35)	max. 80 75-90	75	2'000'000	↑	2270 2800-3300	1850 2000-2600	1400 1500-2000	2270 3050	1850 2300	1400 1750	2060 2600	1600 2000	1040 1400	1800 2270	1400 2050	800 1050	3050 3600	2300 2900
4N145 Cr13 (VCN45)	max. 90 100-115	80	2'000'000	↑	2700-3000 3200-4000	1900-2700 2300-3500	1500-2100 1750-2700	2850 3600	2250 2900	1800 2200							2850 3600	2300 2900
Acclé40.97	40-50	20	2'150'000	↑	1100	600-850	500-700	1100	600-850	500-700	1040	800	560	1040	800	560	1600	1200
Acclé45.97	45-55	23	2'150'000	↑	1300	700-1000	550-800	1300	700-1000	550-800	1200	960	740	1200	960	740	1800	1500
Acclé50.97	50-60	25	2'150'000	↑														
Acclé55.97	55-65	28	2'150'000	↑														
Acclé60.97	60-70	30	2'150'000	↑	1800	850-1200	700-1000	1800	850-1200	700-1000	1520	1200	880	1520	1200	880	2300	1800
Ft 15.91	15		75'000	↑													900	600
Ft 20.91	20		75'000	↑														
Ft 25.91	25		75'000	↑														
Ft 30.91	30		75'000	↑													1100	900

ATTENTION AUX UNITÉS
diviser ces valeurs par 100 = $\frac{\text{daN}}{\text{mm}^2}$

limite élastique en % de la résistance à la rupture

Désignation	Composition en %			Essais statiques à la traction [hbars]			Limites d'endurance		Observations	
				rupture σ_u	limite élast. σ_e	allong. 5% δ_5	dureté Brinell H_B	Résilience α_K [bars]		flexion $\pm \sigma_3$ [hbars]
Acier coulé 40-97 (VSM 10697)				40-50	20			6	18	11
" " 45.97 "				45-55	23			5	20	12
" " 50.97 "				50-60	25			4	22	12,5
" " 55.97 "				55-65	28			3	22	"
" " 60.97 "				60-70	30			3	23,5	13
Fte mall. B 92 (VSM 10692)				36-42	20-23				15	10
" " N 92 "				36	19				13	8,5
Bronze à l'étain Bz Sn 20 et Bz Sn 14 (VSM 10820) (DIN 1705)				15/20		0/3	180/90			
" " " 10 "				20		12/18	70/60			
Bronze au zinc Bz Zn 10 et Bz Zn 8				28/35		5/10	115/100		13	7,5
" " 5 " "				20/15		10/6	70/70			
Bronze au Pb Bz Pb 10/8/3				15/20		10/15	60/50		3,5	2,5
Bronze d'alv GAl Bz 9 (moule)				18/15/17		15/8/8				
Al Bz 4 (recuit et dur)				35		$\lambda_{10} = 35$	80			
Al Bz 9 (" ")				34/50		" 50/2	60/130			
" " 63 / 67 / 90				45/63		" 30/5	90/160			
" laminé 58 VSM 11854 (mou et dur)				15/18/20	11	$\lambda_5 = 6/10/20$	45/10/60		7	4
" " 60				40/60		$\lambda_{10} = 25/5$	80/160			
" " 63				38/55		" 30/10	80/150			
" " 63				35/45		"	60/120			
Alliages d'aluminium - d'après les tables de				la S.A.						
Aluman (recuit - dur)				12/25	7/17	30/2	30/50		(A.I.R.4) à	Chippis
Peraluman 15 (" - ")				15/24	6/22	25/7	40/65		6/7	
Anticorodal 15, trempé et revenu				40	30	12	100			
Avional 25 (recuit - dur)				20/50	10/40	20/10	55/140			
Perenal (" - ")				20/60	9/55	$\lambda_{10} 20/10$	60/175	1	10/13	
Anticorodal coulé GAl-Si-Mg				18-30	15-29	5-9,5	70-100	0,1	7,5	
Silefont-1 " GAl-12Si				20	8,5	7	55	0,7	5,5	
" 2 " GAl-12Si-Mg				29	24	0,5-4	100	0,3	9-12	
" 3 " GAl-10Si-Mg				24-30	18-25	3-8	75-90	0,4	9-11	
Electron (moule / forgé et traité)				17/36	15/20	4,5/14			6,5/13	3/8

- 1 Diagramme de traction des métaux
- 2 Module de rigidité (élasticité) Longitudinale E
- 3 Module de rigidité transversale G
- 4 Traction - compression
- 5 Cisaillement, Flambage
- 6 Centre de gravité G
- 7 Moments quadratiques J
- 9 Module de résistance à la flexion W , à la torsion W_t
- 12 Flexion
- 13 Moments de flexion, flèches, réactions d'appuis
- 15 Torsion
- 16 Caractéristiques de quelques matériaux